2.8.16 Vzorce pro výpočty s mocninami

Předpoklady: 020815

Pedagogická poznámka: Je třeba žákům připomenout, aby si na příští hodinu zopakovali zjednodušení složených zlomků.

Př. 1: Vypočti.

a) 100^4 b) $(-0,5)^4$ c) $0,2^5$ d) $0,9^4$

e) $\sqrt[4]{0,000\,000\,01}$ f) $\sqrt[4]{160000}$ g) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ h) $\sqrt[5]{10^{10}}$

a) $100^4 = 100\,000\,000 = 10^8$ b) $(-0,5)^4 = 0,0625$ (jinak: $(-0,5)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$)

c) $0,2^5 = 0,00032$ d) $0,9^4 = 0,6561$

e) $\sqrt[4]{0,000\,000\,01} = 0,01$ f) $\sqrt[4]{160000} = 20$

g) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ h) $\sqrt[5]{10^{10}} = 100 = 10^2$

Př. 2: Doplň místo obdélníčků správné číslo.

a) $(-2)^4 = \square$ b) $\square^5 = -1$ c) $(-20)^{\square} = 64\,000\,000$

d) $\square^4 = -0,0081$ e) $(-0,3)^4 = \square$ f) $(-2)^{\square} = 256$

a) $(-2)^4 = 16$ b) $(-1)^5 = -1$ c) $(-20)^6 = 64\,000\,000$

d) $\square^4 = -0,0081$ (nejde, čtvrtá mocnina je nezáporné číslo jako druhá mocnina)

e) $(-0,3)^4 = 0,0081$ f) $(-2)^8 = 256$

Mocniny deseti umožňují elegantně zkrátit zápis některých velkých čísel.

- $1000 = 10^3$,
- $1\,000\,000 = 10^6$.

Mocniny umí i zjednodušit některé výpočty.

- $10^3 \cdot 10^6 = 10^9$,
- $1\,000 \cdot 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000$.

První verze je určitě úspornější a přehlednější.
Jak jsme přišli na číslo 9 v exponentu?

- Násobíme číslo se třemi a šesti nulami $\Rightarrow$ výsledek musí mít devět nul.

- Rozepíšeme si součin: $10^3 \cdot 10^6 = (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 10^9$ ´(v součinu je celkem devět desítek $\Rightarrow$ výsledek musí být 10^9.

Př. 3: Zjednoduš a výsledek napiš jako mocninu. Dokonči vzorec $a^m \cdot a^n = .$

a) $2^3 \cdot 2^2$ b) $3^2 \cdot 3^7$ c) $(-2)^4 \cdot (-2)^5$ d) $2^5 \cdot 4^2$

a) $2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^5$ b) $3^2 \cdot 3^7 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^9$

c) $(-2)^4 \cdot (-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^9$

d) $2^5 \cdot 4^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Násobíme *m* (první mocnina) a *n* (druhá mocnina) stejných členů $\Rightarrow$ dohromady $m+n$ **stejných členů**.

Pedagogická poznámka: Násobení desítek před příkladem stačí většině žáků k tomu, aby příklad vyřešili. Ostatním připomínám, aby si rozepsali, co například 2^3 znamená. Stejně tak radím u bodu d), který je nejtěžší.

Pedagogická poznámka: O vzorci se určitě rozhoří diskuse. Část třídy (často Ti nejlepší) bude poukazovat na poslední bod, pro který vzorec neplatí (v exponentu přece není 7, ale 9). Žáci si sami rychle vyjasní, že poslední bod neodpovídá vzorci hlavně kvůli tomu, že v něm vystupují dva různé základy mocnin, zatímco vzorec obsahuje pouze jedno písmenko *a* a tím předpokládá, že obě mocniny mají základ stejný.

Př. 4: Zjednoduš a výsledek napiš jako mocninu. Dokonči vzorec $\frac{a^m}{a^n} = .$

a) $\frac{2^7}{2^4}$ b) $\frac{7^5}{7^2}$ c) $\frac{(-2)^{12}}{(-2)^9}$ d) $\frac{3^5}{2^3}$

a) $\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ b) $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

c) $\frac{(-2)^{12}}{(-2)^9} = \frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} =$
$= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3$

d) $\frac{3^5}{2^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ - nejde nic zkrátit, zlomek nejde zjednodušit.

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

V čitateli je m členů, z nich se n zkrátí se stejnými členy ve jmenovateli a zbude jich $m-n$.

Př. 5: Zjednoduš a výsledek napiš jako mocninu. Dokonči vzorec $\left(a^m\right)^n = $.

a) $\left(2^3\right)^2$ b) $\left(5^4\right)^3$ c) $\left[(-2)^{11}\right]^3$ d) $\left(2^3 \cdot 3^2\right)^3$

a) $\left(2^3\right)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2) = 2^6$

b) $\left(5^4\right)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = (5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5) = 5^{12}$

c) $\left[(-2)^{11}\right]^3 = (-2)^{11}\cdot(-2)^{11}\cdot(-2)^{11} = (-2)^{33}$ (v součinu se 33 krát opakuje -2)

d) $\left(2^3 \cdot 3^2\right)^3 = \left(2^3\right)^3 \cdot \left(3^2\right)^3 = 2^9 \cdot 3^6$

$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$ (v součinu se n-krát opakuje a^m $\Rightarrow$ součin obsahuje $m\cdot n$ členů a)

Př. 6: Zjednoduš a výsledek napiš jako mocninu.

a) $2^3\cdot(-2)^2$ b) $2^3\cdot(-2)^3\cdot 4^2\cdot 8$ c) $\dfrac{(-2)^9}{2^4}$ d) $\dfrac{(-2)^5\cdot 8}{4^2}$

a) $2^3\cdot(-2)^2 = 2^3\cdot 2^2 = 2^5$

b) $2^3\cdot(-2)^3\cdot 4^2\cdot 8 = 2^3\cdot -2^3\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = -2^6\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2^3 = 2^{13}$

c) $\dfrac{(-2)^9}{2^4} = \dfrac{-2^9}{2^4} = -2^5$ d) $\dfrac{(-2)^5\cdot 8}{4^2} = \dfrac{-2^5\cdot 2^3}{\left(2^2\right)^2} = -\dfrac{2^8}{2^4} = -2^4$

Př. 7: Vypočti.

a) $\dfrac{2^3\cdot 2^4\cdot 2^2}{2^4\cdot 2}$ b) $3^{n+1}\cdot 3^3$ c) $\dfrac{5^{3n+1}}{5^{n+3}}$ d) $\dfrac{7^{2n+5}}{7^5\cdot 7^{n-3}}$

a) $\dfrac{2^3\cdot 2^4\cdot 2^2}{2^4\cdot 2} = \dfrac{2^{3+4+2}}{2^{4+1}} = \dfrac{2^9}{2^5} = 2^{9-5} = 2^4$ b) $3^{n+1}\cdot 3^3 = 3^{n+1+3} = 3^{n+4}$

c) $\dfrac{5^{3n+1}}{5^{n+3}} = 5^{3n+1-(n+3)} = 5^{3n+1-n-3} = 5^{2n-2}$

d) $\frac{7^{2n+5}}{7^5 \cdot 7^{n-3}} = \frac{7^{2n+5}}{7^{5+n-3}} = \frac{7^{2n+5}}{7^{n+2}} = 7^{2n+5-n-2} = 7^{n+3}$

Př. 8: Najdi co nejúsporněji prvočíselný rozklad čísla $56 \cdot 48$. Je číslo $56 \cdot 48$ dělitelné číslem 64?

Nebudeme mezi sebou čísla 56 a 48 násobit (čím větší číslo, tím hůře se hledá prvočíselný rozklad), ale rozložíme je zvlášť a pak vynásobíme hotové rozklady.

- $56 = 8 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$
- $48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 3$

$56 \cdot 48 = 2^3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 3 = 2^7 \cdot 3 \cdot 7$

$64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$ $\Rightarrow$ číslo $56 \cdot 48$ je dělitelné číslem 64, protože jeho prvočíselný rozklad obsahuje 2^6

Shrnutí: Úpravy výrazů s mocninami usnadňují vzorce $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$,